Beobachtung über Reihen, deren Terme nach den Sinus oder Kosinus vielfacher Winkel fortschreiten*

Leonhard Euler

§1 Wenn also die Summation dieser Reihe

$$A + Bx + Cxx + Dx^3 + \text{etc}$$

bekannt war, sodass, welcher Wert auch immer dem Buchstaben x zugeteilt wird, ihre Summe angegeben werden kann, dann wird auch immer so die Summe dieser Reihe

$$A + B\cos\varphi + C\cos 2\varphi + D\cos 3\varphi + \text{etc}$$

wie dieser

$$B\sin\varphi + C\sin 2\varphi + D\sin 3\varphi + E\sin 4\varphi + \text{etc}$$

beschafft werden können. Weil nämlich die Summe der ersten Reihe durch eine gewisse Funktion von x ausgedrückt wird, die wir mit dem Charakter $\Delta : x$ bezeichnen wollen, sodass

$$\Delta : x = A + Bx + Cxx + Dx^3 + \text{etc}$$

ist, wird, wenn wir anstelle von x

$$\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi$$

*Originaltitel: „Observationes generales circa series, quarum termini secundum sinus vel cosinus angulorum multiplorum progrediuntur“, erstmals publiziert in „*Nova Acta Academiae Scientarum Imperialis Petropolitinae* 7, 1793, pp. 87-98 “, Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 16, pp. 163 - 177“, Eneström-Nummer E655, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Artur Diener, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz“

sowie

$$\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi$$

schreiben, die Summen der daher entstehenden Reihen

$$2A + 2B\cos\varphi + 2C\cos 2\varphi + 2D\cos 3\varphi + 2E\cos 4\varphi + \text{etc}$$

sein, deren Summe also

$$\Delta : \left(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi\right) + \Delta : \left(\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi\right)$$

sein wird; wenn wir aber letztere von der ersten abziehen, wird diese Reihe hervorgehen:

$$2B\sqrt{-1}\sin\varphi + 2C\sqrt{-1}\sin 2\varphi + 2D\sqrt{-1}\sin 3\varphi + 2E\sqrt{-1}\sin 4\varphi + \text{etc}$$

hervorgehen, deren Summe also

$$\Delta : \left(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi\right) - \Delta : \left(\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi\right)$$

sein wird.

§2 Damit wir diese Ausdrücke vereinfachen, wollen wir der Kürze wegen

$$\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi = p \quad \text{und} \quad \cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi = q$$

setzen und es wird, wie im Allgemeinen bekannt ist,

$$pq = 1$$

sein und daher

$$q = \frac{1}{p};$$

dann wird aber

$$\cos\varphi = \frac{p+q}{2}, \quad \cos 2\varphi = \frac{pp+qq}{2}, \quad \cos 3\varphi = \frac{p^3+q^3}{2}, \quad \cos 4\varphi = \frac{p^4+q^4}{2}, \quad \text{etc}$$

sein. Außerdem aber wird man für die Sinus haben

$$\sin\varphi = \frac{p-q}{2\sqrt{-1}}, \quad \sin 2\varphi = \frac{pp-qq}{2\sqrt{-1}}, \quad \sin 3\varphi = \frac{p^3-q^3}{2\sqrt{-1}}, \quad \sin 4\varphi = \frac{p^4-q^4}{2\sqrt{-1}}, \quad \text{etc},$$

nach Festsetzen wovon wir diese 2 Summationen erreichen:

$$A\cos 0\varphi + B\cos\varphi + C\cos 2\varphi + D\cos 3\varphi + \text{etc} = \frac{\Delta : p + \Delta : q}{2}$$

und

$$A\sin 0\varphi + B\sin\varphi + C\sin 2\varphi + D\sin 3\varphi + \text{etc} = \frac{\Delta : p - \Delta : q}{2\sqrt{-1}}.$$

§3 Wir wollen nun für die anfängliche Reihe eine beliebige entwickelte Potenz des Binoms nehmen, welche

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}xx + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \text{etc}$$

ist, sodass in diesem Fall

$$\Delta : x = (1+x)^n$$

ist, dann aber, damit wir diesen Ausdruck zusammenfassen, wollen wir die einzelnen Koeffizienten, wie ich es schon des öfteren gemacht habe, mit diesen Charakteren bezeichnen:

$$\left(\frac{n}{0}\right), \left(\frac{n}{1}\right), \left(\frac{n}{2}\right), \left(\frac{n}{3}\right), \left(\frac{n}{4}\right), \text{etc},$$

sodass

$$\begin{aligned}
\left(\frac{n}{0}\right) &= 1 \\
\left(\frac{n}{1}\right) &= n \\
\left(\frac{n}{2}\right) &= \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} \\
\left(\frac{n}{3}\right) &= \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} \\
\text{etc}
\end{aligned}$$

ist, wo es förderlich sein wird, bemerkt zu haben, dass im Allgemeinen

$$\left(\frac{n}{1}\right) = \left(\frac{n}{n-i}\right)$$

ist und daher

$$\left(\frac{n}{n}\right) = \left(\frac{n}{0}\right) = 1.$$

Außerdem ist in der Tat klar, dass, sooft i entweder eine negative Zahl war oder eine positive größer als n, dass dann immer

$$\left(\frac{n}{i}\right) = 0$$

ist, wenn natürlich n eine ganze Zahl war. Nachdem diese Dinge also bemerkt worden sind, werden wir diese anfängliche Summation haben:

$$(1+x)^n = \left(\frac{n}{0}\right) + \left(\frac{n}{1}\right)x + \left(\frac{n}{2}\right)x^2 + \left(\frac{n}{3}\right)x^3 + \left(\frac{n}{4}\right)x^4 + \text{etc},$$

woher also durch die gerade angegebenen Festlegungen diese beiden Summationen berechnen werden:

$$\binom{n}{0}\cos 0\varphi+\binom{n}{1}\cos 1\varphi+\binom{n}{2}\cos 2\varphi+\binom{n}{3}\cos 3\varphi+\text{etc}=\frac{(1+p)^n+(1+q)^n}{2}$$

und

$$\binom{n}{0}\sin 0\varphi+\binom{n}{1}\sin 1\varphi+\binom{n}{2}\sin 2\varphi+\binom{n}{3}\sin 3\varphi+\text{etc}=\frac{(1+p)^n-(1+q)^n}{2\sqrt{-1}}.$$

In diesem Fall aber werden sich, obwohl die für p und q angenommenen Formeln imaginär sind, dennoch die Formeln auf reelle Werte zurückführen lassen, so wie wir in den folgenden Problemen zeigen werden.

PROBLEM 1

Nachdem diese Reihe der Kosinus vorgelegt wurde

$$1+\frac{n}{1}\cos\varphi+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cos 2\varphi+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cos 3\varphi+\text{etc}=s,$$

sodass durch die festgesetzten Charaktere

$$s=\binom{n}{0}\cos 0\varphi+\binom{n}{1}\cos 1\varphi+\binom{n}{2}\cos 2\varphi+\binom{n}{3}\cos 3\varphi+\text{etc},$$

ist ihre Summe reell auszudrücken.

LÖSUNG

§4 Weil also, wie wir gerade gesehen haben

$$s=\frac{(1+p)^n+(1+q)^n}{2}$$

ist, während

$$p=\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi \quad \text{und} \quad q=\cos\varphi-\sqrt{-1}\sin\varphi$$

wird, geht die ganze Aufgabe darauf zurück, dass dieser für s beschaffte Ausdruck vom Imaginären befreit wird; es ist nämlich klar, wenn die Formeln $(1+p)^n$ und $(1+q)^n$ entwickelt werden, dass sich dann die imaginären Anteile von selbst aufheben werden, weil ja die zu summierende Reihe selbst entsteht; deshalb werden wir eine andere Auflösung suchen, dass ohne angewandte Entwicklung die imaginäre Anteile aufgehoben werden; das wird auf die folgende Weise gemacht werden können.

§5 Weil $pq = 1$ ist, wird die Formel $1 + p$ so ausgedrückt werden können, dass

$$1 + p = (\sqrt{p} + \sqrt{q})\,\sqrt{p}$$

ist; und auf ähnliche Weise wird

$$1 + q = (\sqrt{p} + \sqrt{q})\,\sqrt{q}$$

sein; nach der Einführung dieser Werte wird unsere Summe als

$$s = \frac{1}{2}\,(\sqrt{p} + \sqrt{q})^n \left(p^{\frac{n}{2}} + q^{\frac{n}{2}}\right)$$

hervorgehen. Weil schon im Allgemeinen

$$p^\alpha + q^\alpha = 2\cos\alpha\varphi$$

ist, wird

$$p^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{1}{2}} = 2\cos\tfrac{1}{2}\varphi \quad \text{und} \quad p^{\frac{n}{2}} + q^{\frac{n}{2}} = 2\cos\tfrac{1}{2}n\varphi$$

sein, nach Einsetzen welcher Werte die gesuchte schon reell auf die folgende Weise ausgedrückt werden wird:

$$s = 2^n \cos^n \tfrac{\varphi}{2} \cos \tfrac{1}{2}n\varphi.$$

§6 Nach dieser Übereinkunft also haben wir eine besonders bemerkenswerte Summation erhalten, die sich so verhält, dass immer

$$\begin{aligned} &1 + \frac{n}{1}\cos\varphi + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cos 2\varphi + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cos 3\varphi + \text{etc} \\ &= 2^n \cos^n \frac{1}{2}\varphi \cos\frac{1}{2}n\varphi, \end{aligned}$$

die immer mit der Wahrheit verträglich ist, welche Zahlen auch immer für n eingesetzt werden, ob ganze oder gebrochene oder sogar negative. Es wird also der Mühe Wert sein, aus jeder Art einfachere Fälle vor Augen zu führen.

Entwicklung der Fälle, in denen der Exponent n eine ganze positive Zahl ist

§7 Wir wollen die folgenden Fälle betrachten:

1. Es sei $n = 0$ und die Reihe selbst wird zur Einheit verschmelzen, die Summe wird aber gleich 1 sein.

2. Es sei $n = 1$ und eine Reihe wird in

   $$1 + \cos\varphi$$

   übergehen; die gefundene Summe aber liefert

   $$2\cos^2 \tfrac{1}{2}\varphi,$$

   es ist aber bekannt, dass

   $$2\cos^2 \tfrac{1}{2}\varphi = 1 + \cos\varphi$$

   ist.

3. Es sei $n = 2$ und die Reihe wird in

   $$1 + 2\cos\varphi + \cos 2\varphi$$

   übergehen, es entsteht aber die Summe

   $$4\cos^2 \tfrac{1}{2}\varphi \cos\varphi.$$

   Gerade aber haben wir gesehen, dass $2\cos^2 \frac{1}{2}\varphi = 1 + \cos\varphi$ ist, welche Form mit $2\cos\varphi$ multipliziert

   $$2\cos\varphi \cdot 2\cos^2 \tfrac{1}{2}\varphi = 1 + 2\cos\varphi + \cos 2\varphi$$

   ergibt.

4. Es sei nun $n = 3$ und es entsteht diese Reihe

   $$1 + 3\cos\varphi + 3\cos 2\varphi + \cos 3\varphi,$$

   deren Summe gleich

   $$8\cos^3 \tfrac{1}{2}\varphi \cos \tfrac{3}{2}\varphi$$

   ist, welche Formel durch hinreichend bekannte Reduktion die Reihe selbst ergibt.

5. Es sei nun $n = 4$ und die Reihe geht über in

   $$1 + 4\cos\varphi + 6\cos 2\varphi + 4\cos 3\varphi + \cos 4\varphi,$$

   deren Summe also

   $$2^4 \cos^4 \tfrac{1}{2}\varphi \cos 2\varphi$$

   sein wird, deren Gültigkeit man auch nicht schwer zeigt. Und so wird sich die Gültigkeit immer durch bekannte Reduktionen zeigen lassen.

Entwicklung der Fälle, in denen für n eine ganze negative Zahl angenommen wird

§8 Wir wollen zuerst $n = -1$ setzen und es wird die folgende unendliche Reihe entstehen:

$$1 - \cos\varphi + \cos 2\varphi - \cos 3\varphi + \cos 4\varphi - \cos 5\varphi + \text{etc}$$

ins Unendlich, deren Summe also durch unsere allgemeine Reihe

$$\frac{\cos\frac{1}{2}\varphi}{2\cos\frac{1}{2}\varphi} = \frac{1}{2}$$

sein wird, was freilich schon längst von den Mathematikern beobachtet worden ist. Wenn daher nämlich diese Reihe, deren Summe solange gleich s gesetzt wird, mit $2\cos\frac{1}{2}\varphi$ multipliziert wird, wird man durch allbekannte Reduktionen

$$2s\cos\frac{1}{2}\varphi = \left\{\begin{array}{c} 2\cos\frac{1}{2}\varphi - \cos\frac{3}{2}\varphi + \cos\frac{5}{2}\varphi - \cos\frac{7}{2}\varphi + \cos\frac{9}{2}\varphi \\ -\cos\frac{1}{2}\varphi + \cos\frac{3}{2}\varphi - \cos\frac{5}{2}\varphi + \cos\frac{7}{2}\varphi - \cos\frac{9}{2}\varphi \end{array}\right\}\text{etc}$$

finden, was natürlich auf $2s\cos\frac{1}{2}\varphi = \cos\frac{1}{2}\varphi$ hinausläuft und daher $s = \frac{1}{2}$.

§9 Wir wollen nun $n = -2$ setzen und es wird die folgende Reihe entstehen

$$1 - 2\cos\varphi + 3\cos 2\varphi - 4\cos 3\varphi + 5\cos 4\varphi - 6\cos 5\varphi + \text{etc},$$

deren Summe also gleich

$$\frac{\cos\varphi}{4\cos^2\frac{1}{2}\varphi}$$

sein wird, deren Gültigkeit darüber hinaus auf die folgende Weise gezeigt werden kann. Nachdem die Summe der Reihe gleich s gesetzt wurde, wird

$$2s\cos\frac{1}{2}\varphi = \left\{\begin{array}{c} 2\cos\frac{1}{2}\varphi - 2\cos\frac{3}{2}\varphi + 3\cos\frac{5}{2}\varphi - 4\cos\frac{7}{2}\varphi \\ -2\cos\frac{1}{2}\varphi + 3\cos\frac{3}{2}\varphi - 4\cos\frac{5}{2}\varphi + 5\cos\frac{7}{2}\varphi \end{array}\right\}\text{etc}$$

sein, welcher Wert zur folgenden Reihe verschmilzt

$$2s\cos\frac{1}{2}\varphi = \cos\frac{3}{2}\varphi - \cos\frac{5}{2}\varphi + \cos\frac{7}{2}\varphi - \cos\frac{9}{2}\varphi + \text{etc}.$$

Man multipliziere erneut mit $2\cos\frac{1}{2}\varphi$ und es wird

$$4s\cos^2\frac{1}{2}\varphi = \left\{\begin{array}{r} \cos\varphi + \cos 2\varphi - \cos 3\varphi + \cos 4\varphi - \cos 5\varphi \\ -\cos 2\varphi + \cos 3\varphi - \cos 4\varphi + \cos 5\varphi \end{array}\right\} \text{etc} = \cos\varphi$$

hervorgehen und daher

$$s = \frac{\cos\varphi}{4\cos^2\frac{1}{2}\varphi},$$

wie wir gefunden haben, oder es wird auch

$$s = \frac{\cos\varphi}{2(1+\cos\varphi)}$$

sein.

§10 Es sei nun $n = -3$ und es wird diese unendliche Reihe entstehen

$$1 - 3\cos\varphi + 6\cos 2\varphi - 10\cos 3\varphi + 15\cos 4\varphi - 21\cos 5\varphi + \text{etc},$$

deren Summe also gleich

$$\frac{\cos\frac{3}{2}\varphi}{8\cos^3\frac{1}{2}\varphi}$$

sein wird. Dieser Ausdruck wird aber weiter auf diesen zurückgeführt

$$s = \frac{1}{2} - \frac{3}{8\cos^2\frac{1}{2}\varphi} = \frac{1}{2} - \frac{3}{4(1+\cos\varphi)},$$

sodass auch

$$s = \frac{-1+2\cos\varphi}{4(1+\cos\varphi)}$$

ist.

§11 Auf ähnliche Weise werden wir auch die folgenden Summationen erhalten:

$$1 - 4\cos\varphi + 10\cos 2\varphi - 20\cos 3\varphi + 35\cos 4\varphi - \text{etc} = \frac{\cos 2\varphi}{16\cos^4 \frac{1}{2}\varphi}$$

$$1 - 5\cos\varphi + 15\cos 2\varphi - 35\cos 3\varphi + 70\cos 4\varphi - \text{etc} = \frac{\cos \frac{5}{2}\varphi}{32\cos^5 \frac{1}{2}\varphi}$$

$$1 - 6\cos\varphi + 21\cos 2\varphi - 56\cos 3\varphi + 126\cos 4\varphi - \text{etc} = \frac{\cos 3\varphi}{64\cos^6 \frac{1}{2}\varphi}$$

$$1 - 7\cos\varphi + 28\cos 2\varphi - 84\cos 3\varphi + 210\cos 4\varphi - \text{etc} = \frac{\cos \frac{7}{2}\varphi}{128\cos^7 \frac{1}{2}\varphi}$$

etc.

Entwicklung des Falles, in dem $n = \frac{1}{2}$ ist

§12 Es wird daher also die folgende unendliche Reihe gebildet werden

$$1 + \frac{1}{2}\cos\varphi - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\cos 2\varphi + \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\cos 3\varphi - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cos 4\varphi + \text{etc},$$

deren Summe also gleich

$$\cos\frac{1}{4}\varphi\sqrt{2\cos\frac{1}{2}\varphi}$$

sein wird, deren Gültigkeit nicht leicht sein wird anderswoher zu prüfen; in anderen Fällen aber springt sie natürlich ins Auge. Wenn z. B. $\varphi = 0$ war, wird man

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4} + \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6} - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} + \text{etc} = \sqrt{2}$$

haben; die Reihe entsteht natürlich aus der Entwicklung

$$(1+1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}.$$

Wir wollen nun $\varphi = 180^\circ$ setzen, dass $\frac{1}{2}\varphi = 90^\circ$ ist, und die Reihe wird

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4} - \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6} - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} - \text{etc} = 0$$

sein, was auch daher klar ist, weil diese Reihe aus der Form $(1-1)^{\frac{1}{2}}$ entsteht. Es sei auch $\varphi = 90^\circ$ und die daher entstehende Reihe wird

$$1 + \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4} - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} + \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12} - \text{etc} = \cos 22^\circ\, 30' \sqrt[4]{2}$$

sein. Es ist aber

$$\cos 22^\circ\, 30' = \sqrt{\frac{1+\cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}},$$

woher man die Summe

$$\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}$$

folgert und so hat man diese höchst bemerkenswerte Summation

$$1+\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}-\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12}-\text{etc}=\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}.$$

Wir wollen auch $\varphi = 60^\circ$ nehmen und es wird diese Reihe entstehen

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot 1+\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{1}{2}\\ +\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12}\cdot 1+\text{etc},\end{aligned}$$

die Summe welcher Reihe also $\cos 15^\circ \sqrt[4]{3}$ sein wird. Weil also

$$\cos 15^\circ = \sqrt{\frac{1+\cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$$

ist, wird die Summe der Reihe

$$\frac{1}{2}\sqrt{3+2\sqrt{3}}$$

sein.

Entwicklung des Falles, in dem $n = -\frac{1}{2}$ ist

§13 Daher wird also die folgende unendliche Reihe gebildet werden

$$1-\frac{1}{2}\cos\varphi+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cos 2\varphi-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cos 3\varphi+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cos 4\varphi-\text{etc},$$

deren Summe also gleich

$$\frac{\cos\frac{1}{4}\varphi}{\sqrt{2\cos\frac{1}{2}\varphi}}$$

sein wird. Daher entsteht, wenn $\varphi = 0$ war, diese Summation

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} - \text{etc} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Diese Reihe entsteht nämlich aus der Form $(1+1)^{-\frac{1}{2}}$. Es sei nun $\varphi = 180^\circ$ und die resultierende Reihe wird

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \text{etc} = \infty$$

sein. Diese Reihe entsteht nämlich aus der Entwicklung $(1-1)^{-\frac{1}{2}}$. Wir wollen auch $\varphi = 90^\circ$ nehmen und die Reihe wird

$$1 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12} + \text{etc} = \frac{\cos 22^\circ\, 30'}{\sqrt[4]{2}}$$

sein. Vorher aber haben wir gesehen, dass

$$\cos 22^\circ\, 30' = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}}$$

ist, woher die Summe gleich

$$\frac{1}{2}\sqrt{1+\sqrt{2}}$$

sein wird.

§14 Im Allgemeinen wird es auch für beliebige Exponenten n der Mühe Wert sein, dem Winkel φ bestimmte Werte zuzuteilen; und nachdem freilich zuerst $\varphi = 0$ genommen wurde, werden wir

$$1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \binom{n}{4} + \text{etc} = 2^n$$

haben; diese Reihe selbst ist natürlich die entwickelte Formel $(1+1)^n$. Wir wollen nun $\varphi = 180^\circ$ nehmen und es wird diese Reihe entstehen

$$1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \binom{n}{4} - \text{etc} = 0,$$

diese Reihe ist natürlich $(1-1)^n$; Es sei auch $\varphi = 90^\circ$ und die daher entstehende Reihe wird

$$1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \binom{n}{8} - \binom{n}{10} + \text{etc}$$

sein, deren Summe also

$$2^n (\cos 45^\circ)^n \cos n45^\circ = 2^{\frac{1}{2}n} \cos n45^\circ$$

sein wird.

§15 Diese letzte Reihe scheint umso größerer Aufmerksamkeit würdig, weil deren Gültigkeit nicht gerade wenig mysteriös ist; daher wird es nicht unpassend sein, dass einige Spezialfälle betrachtet werden und zwar für ganze positive Zahlen:

1. Wenn $n = 0$ ist, wird $1 = 1$ sein.
2. Wenn $n = 1$ ist, wird $1 = \cos 45^\circ \sqrt{2}$ sein.
3. Wenn $n = 2$ ist, wird $1 - 1 = 2 \cos 90^\circ = 0$ sein.
4. Wenn $n = 3$ ist, wird $1 - 3 = 2^{\frac{3}{2}} \cos 3 \cdot 45^\circ = -2$ sein.
5. Wenn $n = 4$ ist, wird $1 - 6 + 1 = 2^2 \cos 4 \cdot 45^\circ = -4$ sein.
6. Wenn $n = 5$ ist, wird $1 - 10 + 5 = 2^{\frac{5}{2}} \cos 5 \cdot 45^\circ = -4$ sein.
7. Wenn $n = 6$ ist, wird $1 - 15 + 15 - 1 = 2^3 \cos 6 \cdot 45^\circ = 0$ sein.
8. Wenn $n = 7$ ist, wird $1 - 21 + 35 - 7 = 2^{\frac{7}{2}} \cos 7 \cdot 45^\circ = 2^3$ sein.
9. Wenn $n = 8$ ist, wird $1 - 28 + 70 + 28 + 1 = 2^4 \cos 8 \cdot 45^\circ = 2^4$ sein.

etc.

§16 Größere Aufmerksamkeit verdienen die Fälle, in denen für n eine negative Zahl angenommen wird, in denen ja unendliche Reihen hervorgehen:

1. Wenn $n = -1$ ist, wird

   $$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{etc} = \frac{\cos 45^\circ}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

   sein.

2. Wenn $n = -2$ ist, wird

   $$1 - 3 + 5 - 7 + 9 - 11 + 14 - 15 + 17 - \text{etc} = \frac{\cos 2 \cdot 45^\circ}{2} = 0$$

   sein.

3. Wenn $n = -3$ ist, wird

$$1 - 6 + 15 - 28 + 45 - 66 + 91 - \text{etc} = \frac{\cos 3 \cdot 45^\circ}{\sqrt{8}} = -\frac{1}{4}$$

sein.

4. Wenn $n = -4$ ist, wird

$$1 - 10 + 35 - 84 + 165 - 286 + 455 - \text{etc} = \frac{\cos 4 \cdot 45^\circ}{4} = -\frac{1}{4}$$

sein.

5. Wenn $n = -5$ ist, wird

$$1 - 15 + 70 - 210 + 495 - 1001 + \text{etc} = \frac{\cos 5 \cdot 45^\circ}{2^{\frac{5}{2}}} = -\frac{1}{8}$$

sein.

6. Wenn $n = -6$ ist, wird

$$1 - 21 + 126 - 462 + 1287 - 3003 + \text{etc} = \frac{\cos 6 \cdot 45^\circ}{8} = 0$$

sein, etc.

Im Allgemeinen wird aber für diese Fälle

$$1 - \frac{\lambda(\lambda+1)}{1 \cdot 2} + \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)(\lambda+4)(\lambda+5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$$
$$+ \frac{\lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+7)}{1 \cdot 2 \cdots 8} - \frac{\lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+9)}{1 \cdot 2 \cdots 10} + \text{etc}$$

sein, die Summe welcher Reihe also gleich

$$\frac{\cos \lambda \cdot 45^\circ}{2^{\frac{1}{2}\lambda}}$$

sein wird.

PROBLEM 2

Nachdem diese Reihe der Sinus vorgelegt wurde:

$$\frac{n}{1}\sin\varphi + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\sin 2\varphi + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\sin 3\varphi + \text{etc} = s,$$

sodass durch die oben verwendeten Charaktere

$$s = \binom{n}{0}\sin 0\varphi + \binom{n}{1}\sin 1\varphi + \binom{n}{2}\sin 2\varphi + \binom{n}{3}\sin 3\varphi + \text{etc}$$

ist, ist der Wert dieser Summe s reell auszudrücken.

LÖSUNG

§17 Wenn wir also hier wiederum die Buchstaben

$$p = \cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi$$

und

$$q = \cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi$$

einführen, teile man, weil ja

$$p^n - q^n = 2\sqrt{-1}\sin n\varphi$$

ist, die vorgelegte Reihe in die 2 folgenden auf

$$2s\sqrt{-1} = \left\{ \begin{array}{l} +\binom{n}{1}p + \binom{n}{2}pp + \binom{n}{3}p^3 + \binom{n}{4}p^4 \\ -\binom{n}{1}q - \binom{n}{2}qq - \binom{n}{3}q^3 - \binom{n}{4}q^4 \end{array} \right\} \text{etc},$$

woher natürlich

$$2s\sqrt{-1} = (1+p)^n - (1+q)^n$$

sein wird.

§18 Hier wird es wiederum gleich förderlich sein bemerkt zu haben, dass

$$1 + p = (\sqrt{p} + \sqrt{q})\sqrt{p}$$

und

$$1 + q = (\sqrt{p} + \sqrt{q})\sqrt{q}$$

ist, nach Verwendung welcher Werte

$$2s\sqrt{-1} = (\sqrt{p} + \sqrt{q})^n (p^{\frac{n}{2}} - q^{\frac{n}{2}})$$

sein wird. Weil daher

$$p^{\frac{n}{2}} - q^{\frac{n}{2}} = 2\sqrt{-1}\sin\tfrac{1}{2}n\varphi$$

ist und

$$\sqrt{p} + \sqrt{q} = 2\cos\tfrac{1}{2}\varphi,$$

wird daher, indem man durch $2\sqrt{-1}$ teilt, die gesuchte Summe reell ausgedrückt hervorgehen:

$$s = 2^n \cos^n \tfrac{1}{2}\varphi \sin\tfrac{1}{2}n\varphi.$$